

ANALYSE DU TRANSFERT DE CHALEUR EN CONVECTION MIXTE LAMINAIRE ENTRE DEUX CYLINDRES COAXIAUX HORIZONTAUX

A. MOJTABI et J.-P. CALTAGIRONE

Laboratoire d'Aérodynamique du CNRS, 4ter, route des Gardes, 92190-Meudon, France

(Reçu le 24 janvier 1980)

Résumé — Nous avons étudié l'écoulement de convection mixte une fois le régime dynamique et thermique établis. Nous avons obtenu la solution de ce problème en utilisant la méthode des perturbations ainsi qu'un modèle aux différences finies. Les résultats obtenus nous ont conduit à caractériser les lignes de courant et à relier les différents pas d'hélices constituant ces lignes aux nombres de Rayleigh, Prandtl et Reynolds.

NOMENCLATURE

NOMENCLATURE			
a ,	diffusivité du fluide, $a = \lambda/\rho c$;	vitesse, $U = \frac{U'r_i}{a}$;	
c ,	chaleur massique;	U' ,	composante radiale de la vitesse;
e_1, e_2, e_3 ,	vecteurs unitaires du repère orthonormé direct;	V ,	composante tangentielle adimensionnelle de la vitesse, $V = \frac{V'r_i}{a}$;
g ,	intensité de l'accélération de la pesanteur;	V' ,	vecteur vitesse de composantes U', V', W' ;
h ,	pas des hélices;	V' ,	composante tangentielle de la vitesse;
P ,	pression adimensionnelle en chaque point du fluide, $P = \frac{P'r_i}{\rho_0 a^2}$;	W ,	composante axiale adimensionnelle de la vitesse, $W = \frac{W'r_i}{a}$;
p' ,	pression en chaque point du fluide;	W' ,	composante axiale de la vitesse;
Pr ,	nombre de Prandtl, $Pr = \frac{\mu}{\rho_0 a}$;	W_m ,	vitesse axiale débitante du fluide à travers toute section droite;
r ,	composante radiale adimensionnelle, $r = \frac{r'}{r_i}$;	z ,	composante axiale adimensionnelle du cylindre, $z = \frac{z'}{r_i}$;
r_e ,	rayon du cylindre extérieur;	z' ,	composante axiale du cylindre.
r_i ,	rayon du cylindre intérieur;	Symboles grecs	
r' ,	composante radiale;		
R ,	grandeur caractéristique de la configuration annulaire, $R = \frac{r_e}{r_i}$;	β ,	coefficient de dilatation thermique;
Ra ,	nombre de Rayleigh, $Ra = \frac{g\beta\rho_0(T_i - T_e)r_i^3}{\mu a}$;	μ ,	viscosité dynamique du fluide;
Ra_L ,	nombre de Rayleigh basé sur l'épaisseur de la couche $Ra_L = Ra(R - 1)^3$;	φ ,	angle polaire orienté par rapport à la verticale ascendante;
Re ,	nombre de Reynolds, $Re = \frac{\rho_0 W_m r_i}{\mu}$;	Ψ ,	fonction de courant;
T ,	température adimensionnelle en chaque point du fluide, $T = \frac{T' - T_e}{T_i - T_e}$;	ω ,	rotationnel, $\omega = -\nabla^2 \Psi$.
T_e ,	température du cylindre extérieur;	1. INTRODUCTION	
T_i ,	température du cylindre intérieur;		
T' ,	température en chaque point du fluide;		
U ,	composante radiale adimensionnelle de la		

Jenn-Wuu Ou *et al.* [3]. Pour la convection mixte en géométrie annulaire cylindrique horizontale, la seule étude expérimentale, en régime non établi, semble due à Zysina *et al.* [4].

Dans ce travail, nous nous intéressons, à l'écoulement laminaire de convection mixte, une fois les régimes dynamique et thermique établis. Nous nous proposons d'obtenir la solution de base de ce problème, ce qui constitue une première étape dans l'étude de sa stabilité. Celle-ci n'a pas encore été effectuée, contrairement à l'étude de la stabilité de l'écoulement de convection naturelle Mojtabi et Caltagirone [5, 6] et de l'écoulement isotherme Mott et Joseph [7] et Carmi [8].

La transition entre le régime laminaire et turbulent se trouve modifiée par l'influence de la convection naturelle. Des régimes turbulents ont été constatés expérimentalement dans des tubes horizontaux pour des nombres de Reynolds de l'ordre de 100 [1], alors qu'en écoulement isotherme le nombre de Reynolds critique expérimental est de l'ordre de 2300.

2. FORMULATION DU PROBLEME

Nous considérons l'écoulement, laminaire et établi d'un fluide entre deux cylindres horizontaux concentriques et isothermes. Le cylindre intérieur de rayon r_i est maintenu à une température constante T_i ; le cylindre extérieure de rayon r_e est à la température $T_e < T_i$. Nous désignerons par $R = r_e/r_i$ le rapport des rayons et nous adopterons des coordonnées cylindriques (r', φ, z') pour l'étude du problème (voir Fig. 1).

Nous adopterons dans toute la suite les hypothèses suivantes:

1. dissipation visqueuse négligeable;
2. propriétés physiques du fluide constantes et variations de masse volumique négligeables sauf dans le terme générateur de la convection naturelle (hypothèse de Boussinesq);
3. gradient axial de pression constant.

Avec les hypothèses précédentes les équations du régime laminaire établi s'écrivent:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}' = 0 \quad (1)$$

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t'} + (\mathbf{V}' \cdot \nabla) \mathbf{V}' \right] = -\nabla p' + \mathbf{F} + \mu \nabla^2 \mathbf{V}' \quad (2)$$

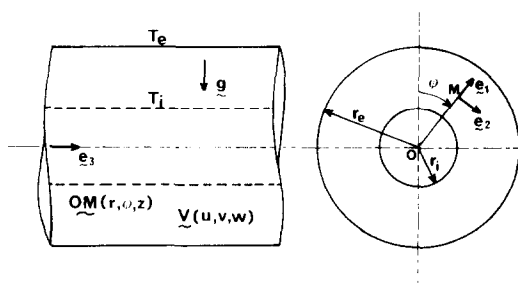


FIG. 1. Schéma de définition.

$$\rho_0 c \frac{\partial T'}{\partial t'} = \lambda \nabla^2 T' - \rho_0 c \mathbf{V}' \cdot \nabla T' \quad (3)$$

où \mathbf{V}' , p' , t' , μ , c , λ désignent respectivement la vitesse, la pression, le temps, la viscosité dynamique, la chaleur massique et la conductivité thermique ces trois dernières constantes sont évaluées à la température de référence $T_0 = (T_i + T_e)/2$. On pose:

$$\mathbf{V}' = U'(r', \varphi) \mathbf{e}_1 + V'(r', \varphi) \mathbf{e}_2 + W'(r', \varphi) \mathbf{e}_3$$

et on désigne par \mathbf{F} la densité volumique des forces extérieures, soit:

$$\mathbf{F} = g \rho_0 \beta (T' - T_e) \cos \varphi \mathbf{e}_1 - g \rho_0 \beta (T' - T_e) \sin \varphi \mathbf{e}_2$$

où g représente l'intensité de l'accélération de la pesanteur, β le coefficient de dilatation thermique du fluide ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sont les vecteurs unitaires du repère direct défini par Fig. 1).

Les équations (1) à (3) sont rendues adimensionnelles par les grandeurs réduites suivantes:

$$r = \frac{r'}{r_i}; \quad z = \frac{z'}{r_i}; \quad t = \frac{t' a}{r_i^2}; \quad T = \frac{T' - T_e}{T_i - T_e};$$

$$U = \frac{U' r_i}{a}; \quad V = \frac{V' r_i}{a}; \quad W = \frac{W' r_i}{a}; \quad P = \frac{p' r_i}{\rho_0 a^2};$$

$$Ra = g \beta \rho_0 \frac{(T_i - T_e)}{\mu a} r_i^3; \quad Pr = \frac{\mu}{\rho_0 a}; \quad Re = \frac{\rho_0 W_m r_i}{\mu}.$$

Ra , Pr et Re représentent respectivement les nombres de Rayleigh, de Prandtl et de Reynolds. W_m représente la composante axiale moyenne de la vitesse.

L'introduction de la fonction de courant Ψ et du rotationnel ω définis par:

$$U = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}; \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (4)$$

$$\nabla^2 \Psi = -\omega \quad (5)$$

et l'élimination de la pression dans l'équation (2) conduit aux équations suivantes:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = Pr \nabla^2 \omega - \left(U \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) - Ra Pr \left(\frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \sin \varphi \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial z} + Pr \nabla^2 W. \quad (8)$$

Le système d'équations (5)–(8) auquel nous adjoignons les conditions aux limites, définit parfaitement l'écoulement de convection mixte. Nous supposons que l'écoulement est symétrique par rapport au plan vertical passant par l'axe des cylindres, ce qui nous conduit aux conditions aux limites:

$$r = 1; \quad \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = W = 0; \quad T = 1 \quad (9)$$

$$r = R; \quad \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = W = 0; \quad T = 0 \quad (10)$$

$$\varphi = 0, \pi; \quad \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \quad (11)$$

On remarquera que l'équation (8) est découplée des équations (5)–(7). Ainsi, on résout le système (5)–(7) avec les conditions aux limites correspondantes et on reporte U et V dans l'équation (8) pour la résoudre. La résolution du système (5)–(7) a déjà été effectuée par Charrier *et al.* [9]. Seule l'équation (8) reste à résoudre.

Dans l'équation (8) figure la constante $\partial p / \partial z$ qui peut être exprimée en fonction du nombre de Reynolds défini précédemment et à partir des relations classiques du régime établi de convection forcée :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -K = Pr \nabla^2 W^0 = - \frac{8Re Pr^2}{R^2 + 1 - \frac{1}{\log R}} \quad (12)$$

et

$$W_m = \frac{1}{S} \iint_S \frac{a}{r_i} W^0(r) dS. \quad (13)$$

Ainsi les grandeurs U , V et T dépendent de trois nombres sans dimension (Ra , Pr , R); par contre la composante axiale W dépend des quatre paramètres (Ra , Pr , R et Re).

3. METHODE DE RESOLUTION

$U(r, \varphi)$ et $V(r, \varphi)$ étant donnés, il s'agit de résoudre l'équation aux dérivées partielles linéaire suivante :

$$Pr \nabla^2 W - U \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{V}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + K = 0 \quad (14)$$

avec : $W(1, \varphi) = W(R, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi$.

3.1. Unicité de la solution

La solution de ce problème est unique, en effet si W_1 et W_2 sont deux solutions différentes du même problème, en posant $L = W_1 - W_2$, on aura :

$$Pr \nabla^2 L = U \frac{\partial L}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad (15)$$

avec

$$L(1, \varphi) = L(R, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi.$$

En multipliant l'équation (15) par L et en intégrant sur toute la couronne, on obtient après quelques transformations :

$$Pr \iint_S |\nabla L|^2 dS = \iint_S \frac{L^2}{2} \nabla \cdot \nabla dS = 0; \quad \nabla \cdot \nabla = 0$$

on tire donc $|\nabla L|^2 = 0 \Rightarrow L = Cte$ et, comme $L(1, \varphi) = L(R, \varphi) = 0$, on a $L = 0 \Rightarrow W_1 = W_2$.

3.2. Méthode des perturbations

Nous avons déterminé précédemment U , V et T par un développement en série entière du nombre de Rayleigh et nous procédons de la même manière pour calculer la composante de vitesse $W(r, \varphi)$.

$$W(r, \varphi) = W^0 + Ra W^1(r, \varphi) + Ra^2 W^2(r, \varphi) \dots$$

L'introduction de cette expression dans l'équation (10) conduit à une suite d'équations aux dérivées partielles linéaires qui est résolue analytiquement par récurrence :

$$Pr \nabla^2 W^0 = -K \quad (16)$$

$$Pr \nabla^2 W^1 = \frac{1}{r} \frac{\partial W^0}{\partial r} \frac{\partial \Psi^1}{\partial \varphi} \quad (17)$$

$$Pr \nabla^2 W^2 = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi^1}{\partial \varphi} \frac{\partial W^1}{\partial r} - \frac{\partial \Psi^1}{\partial r} \frac{\partial W^1}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial W^0}{\partial r} \frac{\partial \Psi^2}{\partial \varphi}. \quad (18)$$

L'équation (16) a déjà été intégrée, en introduisant la solution W^0 obtenue (12) dans l'équation (17) nous obtenons par intégration :

$$W^1(r, \varphi) = X(r) \cos \varphi \quad (19)$$

ou

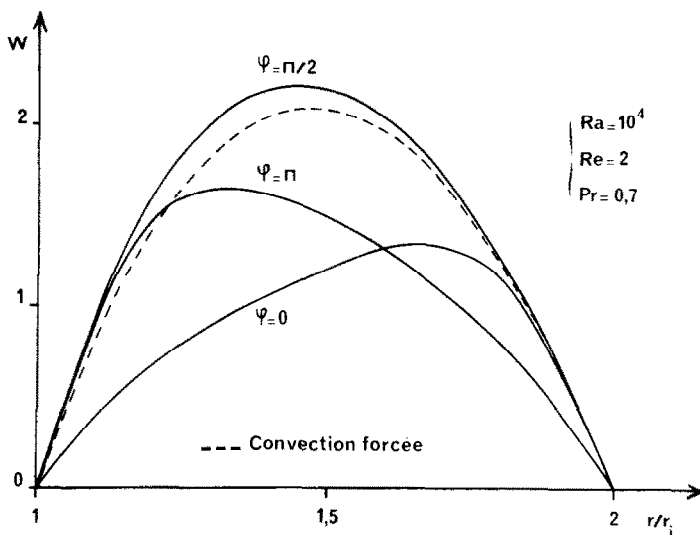
$$X(r) = \frac{Kr}{4Pr^2(R-1)} [\mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(R)] R + (R-1) \mathcal{L}(r) + \mathcal{L}(R) - R \mathcal{L}(1) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(r) = & \frac{(R^2-1)}{\log R} \left[B_1 \frac{r^5}{20} + B_2 \frac{r^3}{6} - \frac{2B_3}{r^3} + \frac{r^3}{16 \log R} \right. \\ & \times \left(\frac{\log r^3}{20} - \frac{1}{100} - \frac{1}{80} \right) + \frac{B_4 r^3}{6} \left(\log r - \frac{5}{6} \right) \\ & - B_1 \frac{r^7}{21} + B_2 \frac{r^5}{10} + B_3 \frac{r^3}{3} + \frac{r^7}{16 \log R} \\ & \left. \times \left(\frac{\log r}{21} - \frac{1}{147} - \frac{1}{128} \right) + B_4 \frac{r^5}{10} \left(\log r - \frac{9}{20} \right) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

L'intégration de l'équation (18) conduit à une solution de la forme $W_2(r, \varphi) = Y(r) + Z(r) \cos 2\varphi$ où $Y(r)$ et $Z(r)$ sont des fonctions explicites de r , dont les expressions développées n'ont pas été explicitées ici en raison de leur longueur ; de plus, pour le tracé de toutes les courbes, nous n'avons tenu compte que de W^0 et de W^1 . Les coefficients B_1, B_2, B_3, B_4 sont fonction uniquement du rapport R de rayons.

3.3. Modèle numérique

Le système (5)–(7) avec les conditions aux limites correspondantes a été résolu numériquement [9]. Les champs U et V ainsi déterminés sont reportés dans l'équation (8) pour calculer la composante axiale W . La résolution des équations (5)–(8) est effectuée par le modèle numérique utilisé en [9] et basée sur la méthode des directions alternées. Les résultats numériques ont été obtenus pour $Pr = 0.7$ pour deux rapports de rayons $\sqrt{2}$, 2 et pour plusieurs valeurs du couple (Ra, Re). L'attention est portée sur la composante axiale W , il s'agit d'une part de déterminer son profil

FIG. 2. Profils de vitesse axiale pour plusieurs inclinaisons, $Ra = 10^4$.

pour plusieurs valeurs de l'angle φ (Fig. 2) et (Fig. 3) et d'autre part de préciser l'influence de Ra et de Re sur W (Fig. 4 et 5).

3.4. Lignes de courant

$U(r, \varphi)$, $V(r, \varphi)$ et $W(r, \varphi)$ étant déterminées, les lignes de courant sont alors obtenues en résolvant le système différentiel suivant :

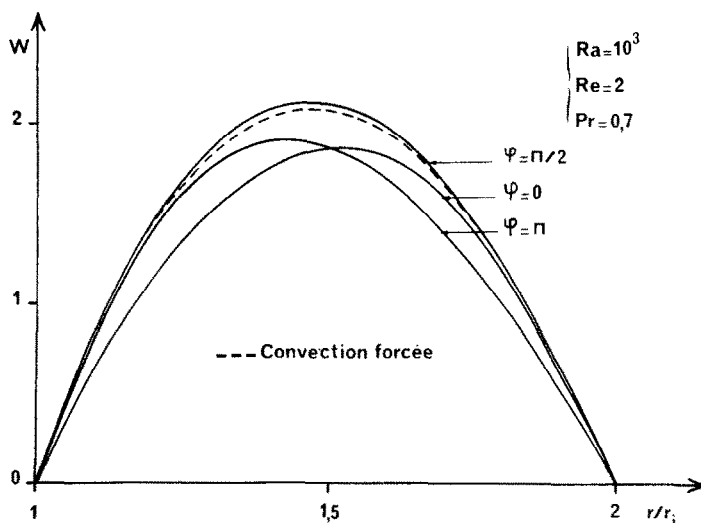
$$\frac{dr}{U(r, \varphi)} = \frac{r d\varphi}{V(r, \varphi)} = \frac{dz}{W(r, \varphi)}. \quad (22)$$

La première équation de ce système conduit à $\Psi(r, \varphi) = C$ où C est une constante et $\Psi(r, \varphi)$ la fonction de courant définie section 1. Ainsi les lignes de courant sont inscrites sur des surfaces cylindriques de

généatrices parallèles à l'axe des z . Pour chaque surface cylindrique $\Psi(r, \varphi) = C$, les lignes de courant ont l'allure d'hélices de même pas h fonction de cette constante C et des nombres Re , Ra , R et Pr . Une visualisation de l'écoulement de convection mixte peut conduire à la mesure des différents pas de ces lignes de courant et par comparaison avec les pas calculés théoriquement à une vérification expérimentale facile de la validité du modèle théorique.

Calcul du pas de l'hélice :

Pendant un intervalle de temps dt , une particule $M(r, \varphi, z)$ va parcourir la distance axiale $dz = W(r, \varphi) dt$ et, en projection sur la section droite, la distance :

FIG. 3. Profils de vitesse axiale pour plusieurs inclinaisons, $Ra = 10^3$.

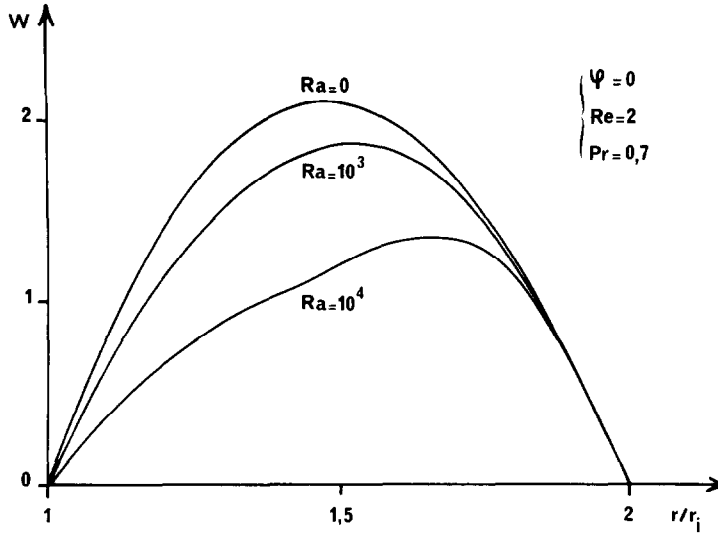


FIG. 4. Influence du nombre de Rayleigh sur la vitesse axiale pour $\varphi = 0$.

$$ds = \sqrt{(U^2 + V^2)}dt, \text{ on en déduit}$$

$$dz = \frac{W}{\sqrt{(U^2 + V^2)}} ds.$$

Le pas de l'hélice correspond à :

$$z = h = \oint_{s_1} \frac{W}{\sqrt{(U^2 + V^2)}} ds \quad (23)$$

c'est-à-dire la distance axiale parcourue quand la particule M aura fait le tour de la ligne de courant $\Psi(r, \varphi) = C$. En remplaçant ds par $\sqrt{[(rd\varphi)^2 + dr^2]}$ l'équation (23) conduit à :

$$h = \oint_{s_1} \frac{W}{U} dr = \oint_{s_1} \frac{W}{V} r d\varphi. \quad (24)$$

Pour calculer cette intégrale curviligne, nous utiliserons les résultats de la méthode des perturbations développée à l'ordre 1. La fonction de courant s'écrit dans ce cas :

$$\Psi(r, \varphi) = Ra \Psi^1(r) \sin \varphi = C. \quad (25)$$

La courbe correspondant à cette fonction de courant est symétrique par rapport à $\varphi = (\pi/2)$. De plus, elle est délimitée par des cercles de rayon r_1 et r_2 et par deux droites définies par les angles φ_1 et φ_2 . Pour déterminer r_1 et r_2 , il suffit de différentier directement l'équation (25) et de poser $(dr/d\varphi) = 0$, ce qui nous donne :

$$\Psi(r) \cos \varphi = 0 \quad \text{soit } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

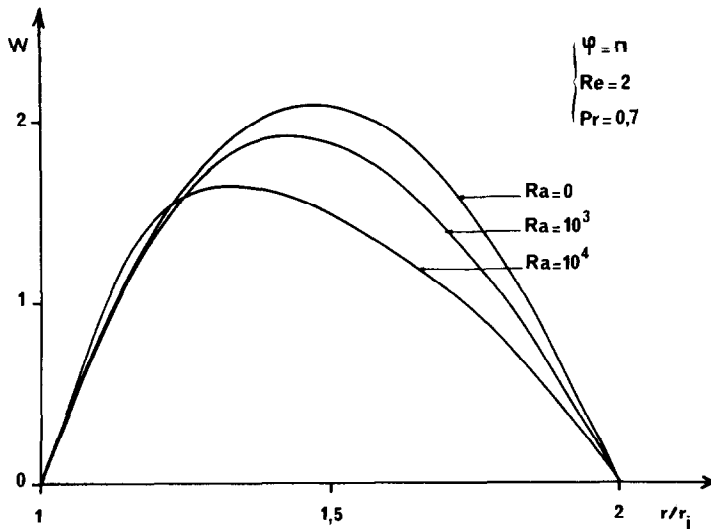


FIG. 5. Influence du nombre de Rayleigh sur la vitesse axiale pour $\varphi = \pi$.

r_1 et r_2 sont ainsi solutions de l'équation :

$$Ra \Psi^1(r) = C.$$

Pour calculer φ_1 et φ_2 , on procède de la même manière, ce qui nous donne :

$$\varphi_1 = \sin\left(\frac{C}{\Psi(r'_1)}\right) \text{ et } \varphi_2 = \pi - \varphi_1$$

où r'_1 est racine de $\Psi'(r) = 0$.

Les frontières de la courbe représentée par la fonction de courant étant définie, on transforme l'intégrale curviligne en intégrale de surface :

$$h = \iint_s -\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{U}{W} \right) dr d\varphi = \iint_s \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{W}{V} \right) dr d\varphi \quad (26)$$

d'où :

$$h = \frac{2}{Ra} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r W^0(r)}{\cos \varphi_1 \Psi^1(r)} dr, \quad (27)$$

$\cos \varphi_1$ est défini par

$$\left(1 - \frac{C^2}{Ra^2 \Psi^1(r)^2} \right)^{1/2}$$

et (r_1, r_2) sont les racines réelles de l'équation :

$$Ra \frac{d}{dr} \Psi^1(r) = C \quad \text{pour } r \in]1, R[.$$

Ainsi, pour un écoulement donné, on détermine les pas de l'hélice en fonction du rapport Ψ/Ψ_{\max} (Fig. 5). On remarquera de plus que ce pas est proportionnel au groupement $(Re Pr)/Ra$.

En développant, à l'ordre 2, le groupement à intégrer :

$$\frac{r W^0(r)}{\Psi^1 \left(1 - \frac{C_{\max}^2}{Ra^2 \Psi^1(r)^2} \right)^{1/2}}$$

on obtient le pas de l'hélice correspondant à la fonction de courant maximale soit :

$$h = \frac{2Re Pr}{Ra \left(R^2 + 1 - \frac{R^2 - 1}{\log R} \right)} \times \frac{r_0 \left(r_0^2 - 1 - (R^2 - 1) \frac{\log r_0}{\log R} \right)}{\sqrt{\left[\Psi^1(r_0) \frac{d^2 \Psi^1}{dr^2}(r_0) \right]}}$$

où r_0 est la racine double de l'équation $Ra \Psi^1(r) = C_{\max}$.

4. INTERPRETATION DES RESULTATS

Nous avons ainsi déterminé, d'une part, une solution approchée par la méthode des perturbations et d'autre part, une solution numérique du problème de l'écoulement de convection mixte. La première solu-

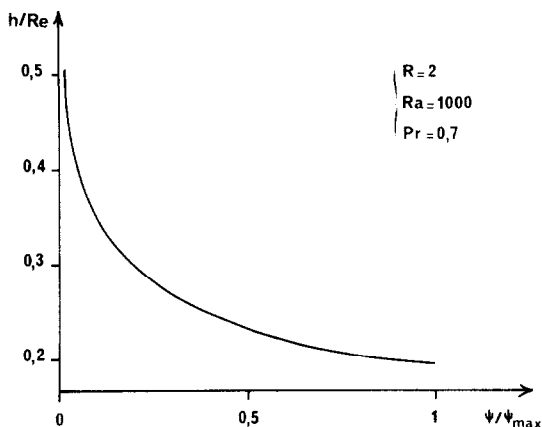


FIG. 6. Pas de l'hélice en fonction de Ψ/Ψ_{\max} .

tion constitue une bonne approximation du problème réel pour ce qui est des faibles valeurs de Ra et Re ; de plus elle ne nécessite pas l'utilisation de gros ordinateurs. Sur les Figs. 2-5 nous remarquons que la composante axiale de vitesse est beaucoup plus importante près du cylindre intérieur pour $\varphi \in]\pi/2; 3\pi/2[$ et c'est le phénomène inverse que l'on observe dans la moitié supérieure de ce même cylindre. Ce fait est d'autant plus marqué que Ra est grand. Ce résultat physique s'explique simplement par les effets de la convection naturelle qui entraîne une partie du fluide vers l'extérieur de certaines zones de la couche annulaire ($\varphi = 0$ et $r \simeq R$, $\varphi = \pi$ et $r \simeq 1$) et apporte du fluide dans d'autres ($\varphi = 0$ et $r \simeq 1$ et $\varphi = \pi$, $r \simeq R$), il s'ensuit un débit axial important dans les premières zones et un faible débit dans les secondes. L'échange de chaleur au niveau des deux cylindres n'est pas modifié par la présence de la composante W en effet la température ne dépend que de Ra , R et Pr [9].

5. CONCLUSION

Le problème de la convection mixte a été résolu de deux manières différentes ; la solution de l'écoulement de base ainsi obtenue constitue par elle-même une première étape dans l'étude de la stabilité de cet écoulement.

Les pas de hélices constituant les trajectoires des particules fluides ont été calculés : leur mesure expérimentale pourra constituer un moyen des plus faciles de vérification de la validité du modèle théorique.

REFERENCES

1. M. B. Metais, Superposition de la convection naturelle à la convection forcée. Journées de la transmission de la chaleur. *Inst. Français Combustibles l'Energie* 393-403 (1961).
2. S. M. Marcos et R. E. Bergles, Experimental investigation of combined forced and free laminar convection in horizontal tubes. *J. Heat Transfer* **34**, 212-219 (1975).
3. Jenn-Wuu Ou, K. C. Cheng et Ran-Chau Lin, Combined free and forced laminar convection in inclined rectangular channels, *Int. J. Heat Mass Transfer* **19**, 277-283 (1976).
4. L. H. Zysina-Molozhen, L. P. Safonov, L. O. Zabezhinski

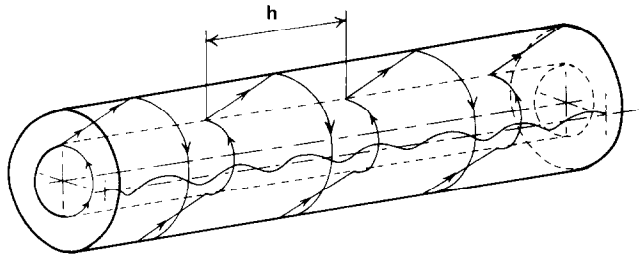


FIG. 7. Schéma des deux lignes de courant limites.

- et L. A. Fel'dberg, Heat transfer by combined forced and natural convection in an annulus formed by two coaxial cylinders, *Heat Transfer—Soviet Res.* **5**, 60–64 (1973).
5. A. Mojtabi et J.-P. Caltagirone, Energy stability of natural convective flow in horizontal annular space, *Physics Fluids* **22**, 1208–1209 (1979).
 6. A. Mojtabi et J.-P. Caltagirone, Etude de la stabilité d'un écoulement de convection naturelle dans un espace annulaire horizontal, *J. Mécanique* **8**, 225–241 (1979).
 7. J. E. Mott et D. D. Joseph, Stability of parallel flow between concentric cylinders, *Physics Fluids* **11**, 2065–2073 (1968).
 8. S. Carmi, Linear stability of axial flow in annular pipe, *Physics Fluids* **13**, 829–831 (1970).
 9. M. C. Charrier-Mojtabi, A. Mojtabi et J.-P. Caltagirone, Numerical solution of flow due to natural convection in horizontal cylindrical annulus, *J. Heat Transfer* **101**, 171–173 (1979).

LAMINAR, MIXED CONVECTION BETWEEN TWO HORIZONTAL COAXIAL CYLINDERS

The mixed convection flow is analysed after it has been dynamically and thermally established. The solution is obtained using both the perturbation method and finite differences. The results obtained permit us to characterize the streamlines and their helicoidal motion is tied to the Rayleigh, Prandtl and Reynolds numbers.

WÄRMEÜBERGANG ZWISCHEN ZWEI HORIZONTAL EN KOAXIALEN ZYLINDERN BEI GEMISCHTER LAMINARER KONVEKTION

Zusammenfassung—Die ausgebildete Strömung bei gemischter Konvektion wurde untersucht. Die Aufgabe wurde mit Hilfe der Störungsmethode und eines finiten Differenzenverfahrens gelöst. Als Ergebnis wurden Stromlinien bestimmt und die verschiedenen Spiralformen, welche diese Linien bilden, mit den Rayleigh-, Prandtl- und Reynolds-Zahlen in Verbindung gebracht.

АНАЛИЗ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ПРИ СМЕШАННОЙ ЛАМИНАРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ СООСНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Аннотация — Проведено исследование развитого и установившегося течения при смешанной конвекции. Задача решалась методом возмущений, а также с помощью метода конечных разностей. Полученные результаты позволили установить зависимость криволинейных траекторий частиц жидкости от чисел Релея, Прандтля и Рейнольдса.